



浙江大学

ZheJiang University

我对数学教育的一些认识

-----以代数课程教学为例

浙江大学数学科学学院

李方

(华侨大学, 2019.11.17)



浙江大学

ZheJiang University

一、教育的生物学思维

- 《生物学思维》：

作者浙大生物学教授王立铭，试图用生物学理论中的基本规律来解释许多社会现象

理论启发了教育工作者，提出了教育学中的“生物学思维”。

择其针对数学教育有启发的地方，
我阐述如下几点：



数学教育的生物学思维

- **基因的传承：**

数学教育的本质，应该是每一门数学课程的“基因”对学生的传承。所以，对教师提出的基本要求，就是深刻理解一门课程的“基因”是什么？

- 比如：对高等代数的“基因”的理解-----

- 不是说它研究“线性方程组”“线性空间”“多项式”等等，而是去理解为什么要研究这些东西？它的“基因”蕴含在这些“为什么”之中，最后反映在它“做什么”之中。



浙江大学

ZheJiang University

- 所以，不能仅仅是知识的传承，更重要的是：动机、方法、解决具体问题的实例。
- 对于基因传承的另一理解，要允许一个合格的教授将属于他自己的学术结构、独特理解甚至自己的学术追求，像基因一样主动传承给学生。
- 这样，不同老师上课才有各自的风采；
这才会带来学术的百花齐放、人才的丰富多彩。
所以，学校不能过度施行“标准化”的教学管理



浙江大学

ZheJiang University

- 基因的变异:

在我们看来，学科的创新性发展就是基因的变异。但在生物学中，变异是有二面性的：

“好的变异”和“坏的变异”

所以，在数学教学中，我们需要逐步让学生学会判断“变异”的“好、坏”。

有点像对数学的审美，但比单纯的审美重要。



浙江大学

ZheJiang University

好的变异：量子群（1980年代）、
丛代数(cluster algebras)(2000年左右)
就是“好的变异”的例子。

一些历史上被人研究，但现在已经被人遗忘的数学理论，至少不是“好的变异”，

比如：双B代数。



浙江大学

ZheJiang University

- 所以，教学管理者不能过度要求“标准化”





浙江大学

ZheJiang University

- 真正重要的数学理论，它的基因传承的力量是非常强大的，比如：
“微积分”、“线性代数”、
“多项式理论”
并且后继学科都是他们“好的变异”产生的结果

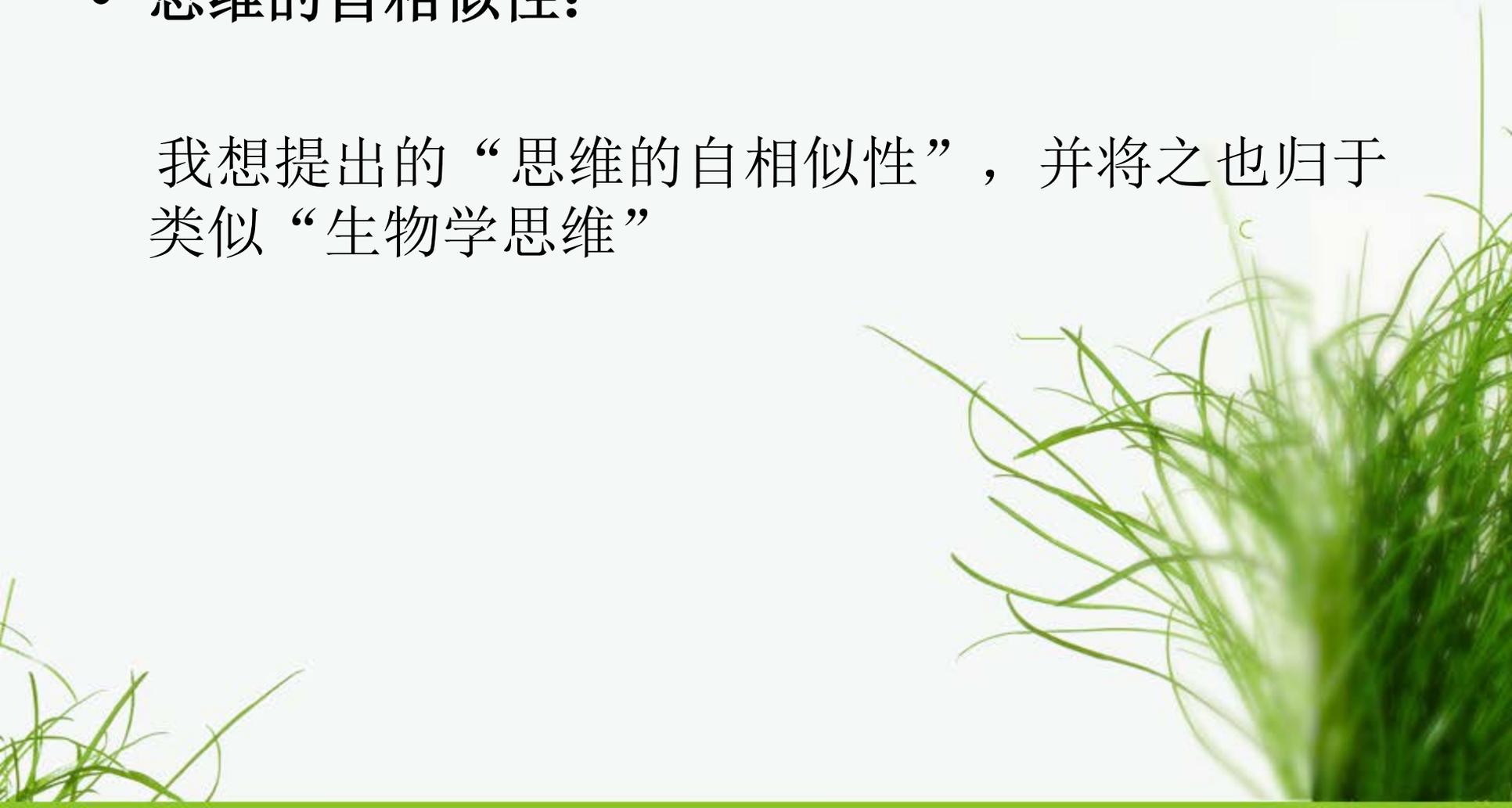


浙江大学

ZheJiang University

- 思维的自相似性:

我想提出的“思维的自相似性”，并将之也归于类似“生物学思维”





浙江大学

ZheJiang University

- 这里涉及我自己的一个认识。
- 自然界和社会中普遍存在“自相似”现象比如：
 - 原子结构与宇宙星系的相似性、
 - 树的结构与树叶茎脉结构的相似性、
 - 人从胚胎到成人与人类进化的相似性、。。。



浙江大学

ZheJiang University

- 所以我提出一种人类思维的自相似性，也就是我们是否可以认为：个体的人对事物认识的过程本质上在重复人类对事物的认识。
（当然不要把这个说法绝对化）
- 从这个观点出发，我们是否应该在教学中关注在数学史上代数学是怎么产生和发展的？
历史上的产生和发展是否也是每个人认识数学的最自然的切入点和自然状态？



浙江大学

ZheJiang University

- 最近，我请教一个心理学家，被告知：
在心理学中，这大约就是认知的传承。

但我们希望通过“思维的自相似”现象，
来寻找数学教学中，老师的教、学生的学的，
自然的、合理的切入点。



浙江大学

ZheJiang University

思维“自相似性”观点下的课程切入

一个教材（也就是按这个教材的授课）从什么内容切入是一个关键，就像下围棋的布局

这是一个价值取向问题，通常没有最好，只有是否符合教师的价值取向和学生的接受可能性。



浙江大学

ZheJiang University

1. 一些教材采取了直接从抽象的线性空间作为整个理论的出发点，这符合数学中布尔巴基学派的风格。

我们的拔尖人才班的教材就是这样开局的。

2. 以矩阵为出发点(林亚南《高等代数》)

3. 也有教材把行列式作为理论的出发点。

4. 从多项式理论从发(北大、北师大《高等代数》)



浙江大学

ZheJiang University

- 但在“思维自相似”观点下，
- 我们觉得把线性方程(组)理论作为出发点比较好，因为这符合人类最早对于代数的认识，从认知传承的角度，比较自然而较易为新生接受。
- 并且对线代和高代我觉得都是合适的



浙江大学

ZheJiang University

从这点出发，我认为线性代数（高等代数）最自然的切入点就可以是线性方程组

从整个代数学科来说，也许还有多项式，也应该是我们思考问题的切入点。但这比较合适数学专业的高代，线性代数不合适。



浙江大学

ZheJiang University

- 自相似性的理解也许只是我自己的看法，或者说是一个信念。
- 但我觉得可以帮助我们数学的历史演进去寻找、体会更自然的给学生讲授的方法
- 所以，数学史不仅仅是研究数学史实的学问，更是我们传承数学的一面“镜子”



浙江大学

ZheJiang University

二、以问题引导来学习、认识新内容：

- 这大约是可以普遍被认同的，这也是我觉得应该是讲课中，经常作为一个方法的。

(我觉得备课的一个方面，就是为今天的课的内容，找到一个能统领的引导性问题，来作为切入点。

内容多，引导的问题就会大，反之就以小问题引入。这体现了教师本身对于传授内容的整体把握。)



浙江大学

ZheJiang University

- 事实上，人类对于线性方程组和多项式理论，就是从实际问题出发来获得认识的。
- 也就是说，人类对于数学的认识，本来就是问题引导的。

所以这应该就是我们教学要坚持的方法。



浙江大学

ZheJiang University

- 比如：讲两个线性空间之间的线性变换和讲两个线性空间的直积，我们可以用“由已有空间构造新空间”的角度，把它们统一起来看：
- $\text{Hom}(U, V)$: U 到 V 的全体线性变换构成的线性空间
 $U \times V$: U 和 V 的直积（笛卡尔积）是线性空间
它们的共同的动机，在于由已有线性空间来构造新的线性空间。由此可以引出一个问题：
是否有别的方法构造新的线性空间？
由此“商空间”的构造也可以在这观点下统一进来



浙江大学

ZheJiang University

- 再比如，在抽象的多项式上，我们为什么需要定义“导数”的概念？
- 那我们就可以把研究刻画多项式的“重因式”的存在性，作为一个很好的动机。因为：

$f(x)$ 没有重因式 当且仅当 $(f(x), f(x)')=1$

这样抽象多项式的导数的引进就有了很自然的必要性。



浙江大学

ZheJiang University

三、从不同角度加深对概念的理解

- 同一个概念常常有不同角度可以来加以认识，这可以加深学生对于这个概念的本质的理解。
- 但我觉得作为最初的概念的引入，就应该是最自然（前面所说自相似性意义下）的一面来进入。



浙江大学

ZheJiang University

- (1) 例如，矩阵的秩的引入和理解-----
- 什么是矩阵的秩？
- 通常有这些认识：
 1. 矩阵的行秩和列秩相等，从而定义出秩；
 2. 行列式不为零的最大子阵的阶；
 3. 矩阵引导的线性映射的像空间的维数；
 4. ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○



浙江大学

ZheJiang University

- 这些作为秩的概念都可以，并且都能从一个侧面反映秩的本质。
- 但我觉得都不够自然，应该有个更简单、自然的秩的认识：
 即：
- 矩阵 A 经过初等变换所得标准型矩阵左上角单位阵的大小就是 A 的秩。



浙江大学

ZheJiang University

- 因为我们从线性方程组引入，高斯消去法就是最自然的方法。所以这样的秩的引入，就是最直观的认识了。
- 一个关键是，要补上一个证明，即：
初等变换后标准型的唯一性。

采用这样定义的教材不多，但还是有，比如：

游宏 《线性代数》 2012年版



• (2) 行列式概念的理解-----

现在不少新的教材，一个共同特点是淡化行列式理论，特别是淡化行列式的计算技巧。也有一个趋势是，尽可能用直观的定义方法代替行列式原来用排列的奇偶性给出的公式定义，比如：

1. 用递推的方式定义；
2. 以矩阵所有特征值的乘积，来作为行列式定义；
3. 作为方阵上的交错 n -线性函数在单位阵上为1的特例；
4.



浙江大学

ZheJiang University

- 行列式理论是否还是必须的？或简化到什么程度是合适的？
- 我的做法是：如果时间允许，将对行列式的不同理解都展示给学生，让他们由此体会行列式的本质。
- 但不必和以前一样，拘泥于行列式的计算
- 至于行列式是否有用：
我觉得对于线性代数的课程，行列式可以淡化。
对于数学系高等代数课程，行列式还是必须的。



浙江大学

Zhejiang University

四、以问题帮助学生统领理论的各个方面

- 谨以下面的例题表达对郭聿琦老师的怀念
- 一个涉及“高等代数”几乎所有主要内容的习题
《数学的实践与认识》(V.38,N.9,2008)(郭聿琦等)
- 例：令 P 是数域， A, B 是 P 上 $n(>1)$ 阶方阵。证明：
若 $A^n = B^n = 0$ ， $A^{n-1} \neq 0$ 且 $B^{n-1} \neq 0$ ，则 A 与 B
在 P 上是相似的。
- 1. 先确定一个事实： A 与 B 在 P 上是相似的当且仅当
 A 与 B 在复数域 C 上是相似的



浙江大学

ZheJiang University

- 2. 矩阵方法的证明:

只需证明A相似于 $J = \begin{pmatrix} 0 & E_{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. 向量空间的方法: 将A看作n维向量空间上的线性变换, 证明: 若 $A^{n+1} = 0$, 则 $A^n = 0$. 再证明A相似于 $J = \begin{pmatrix} 0 & E_{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. 线性变换的方法:

因为 $A^n = 0, A^{n-1} \neq 0$, 所以存在n维向量w使得 $A^{n-1}w, \dots, Aw, w$ 是 P^n 的一组基, 且这组基下矩阵为J.



浙江大学

ZheJiang University

- 5. λ -矩阵的方法:

A和**B**的最小多项式均为 λ^n , 因此它们的全部不变因子均为: $1, \dots, 1, \lambda^n$ ($n-1$ 个1), 从而**A**与**B**相似。



浙江大学

ZheJiang University

五、带着“问题”离开课堂：

- 前面说了，问题引导学生更好地进入学习。
- 另一方面，我认为：研究型学习，其实就是：
“让学生带着问题离开课堂”
- 这可以让学生继续保持对课程的兴趣和动力，加深对于所学内容的理解。
- 当然也有助于学生为以后考试做好准备。



浙江大学

ZheJiang University

(1) . 关于多项式理论的进一步思考:

作为唯一分解整环二个特例，多项式环和整数环天然有很多共同点。但我们通常更多是从整数理论帮助去理解多项式理论。其实，有时多项式理论的良好性质，反过来可以帮助思考整数理论。

回到前面的例子-----

复多项式 $f(x)$ 有重因式

当且仅当 $(f(x), f'(x)) \neq 1$



浙江大学

ZheJiang University

- 问题一：

这样类似的判断是否有重因式的结论，在整数理论中有吗？没有。为何没有呢？

关键：只有多项式理论中，可以合理地定义导数的概念

整数理论中没有导数的概念！

这是多项式理论优于整数理论的地方。



浙江大学

ZheJiang University

- 问题二:

复多项式 $f(x)$ 有重因式

当且仅当 $(f(x), f(x)') \neq 1$

如果把复数域改为域 F , 但 $\text{char}F=p$ (素数),
这个结论还成立吗?

答案是否定的, 并且学生应该也不难找到反例,
但要学过抽象域以后。



浙江大学

ZheJiang University

这些问题给学生提供了两点思考：

- ① 一个结论在不同的环境下，不要想当然地认为它还是成立的。
- ② 知道怎么证明了，有时还需思考为什么这么证？关键点在哪？从而通过比较，为解决别的问题提供思路。



浙江大学

ZheJiang University

(2) 二个经典问题的组合方法延拓

- 问题一. 若干子空间的维数公式

我们知道：维数公式-----

对于子空间 V_1 和 V_2 , 有:

$$\dim V_1 + \dim V_2$$

$$= \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$$

问题：对于子空间 V_1, \dots, V_m , 怎么给出维数公式?



浙江大学

ZheJiang University

- 问题二:
- 对多项式 f_1 和 f_2 , 最大公因式和最小公倍式的关系:

$$f_1, f_2 = f_1 f_2$$

- 怎么建立对若干个多项式 f_1, \dots, f_n 的类似的关系?



浙江大学

ZheJiang University

- 当我把这二个问题的提给学生，有学生自然地想到了组合论中的Venn图和容斥原理，并且尝试地获得自己的结论。
- 但是，容斥原理在这里只能帮助思考，对于问题二可以用，对问题一有反例。
(见席南华《基础代数》(第二卷))



浙江大学

ZheJiang University

浙大《高等代数》课程的特点

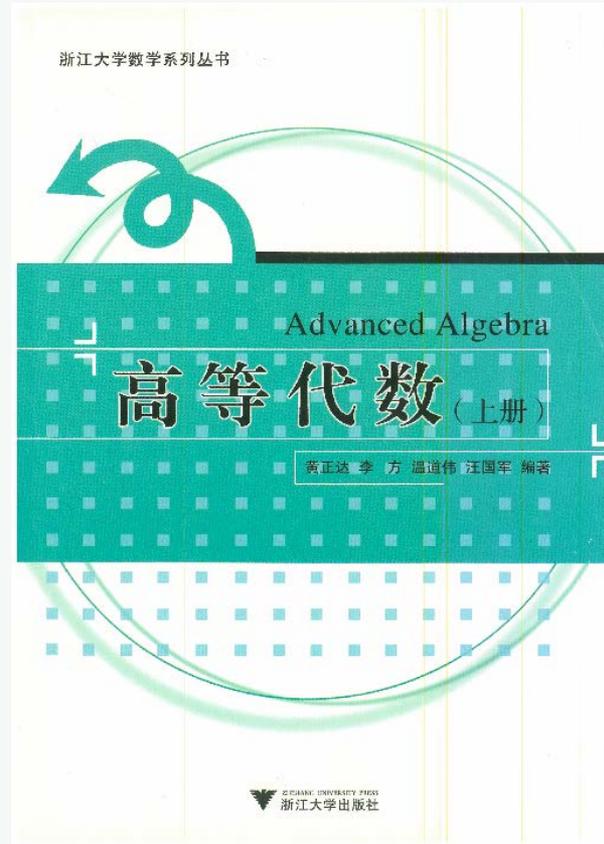
- 一、理科大类招生下的《高等代数》教学要求我们在保证数学系学生高代教学不降低要求的前提下，要顾及大类中将不学数学系的本科生的要求。

(这方面我们的工作主要体现在自己编写的教材，这是学院当初“命题作文”要求下完成的，在国内大约算第一个以此为目的的教材体系。)



浙江大学

ZheJiang University



浙江大学数学系列丛书

Advanced Algebra

高等代数 (上册)

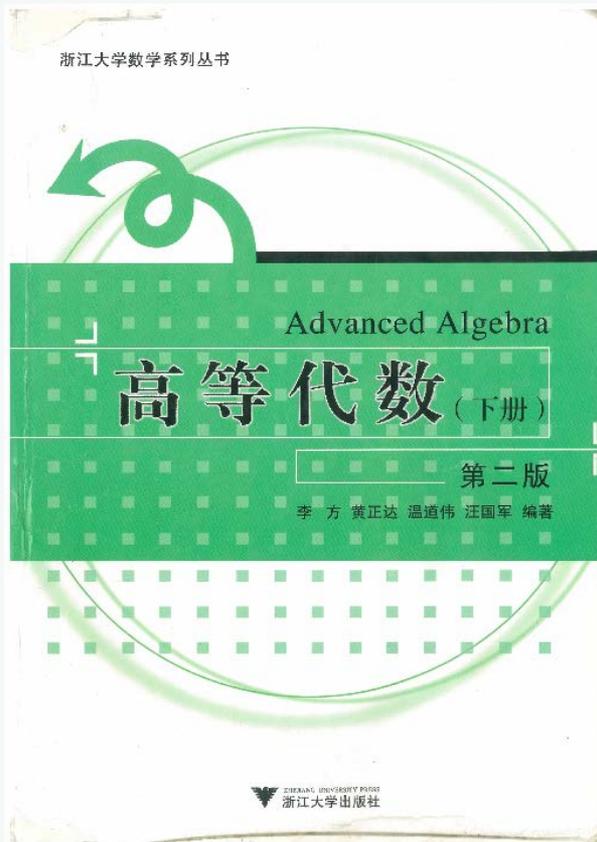
黄正达 李方 温道伟 汪国军 编著

© ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社



浙江大学

ZheJiang University





浙江大学

ZheJiang University

- 这个教材的特点：

上册从内容上基本依据线性代数内容安排，但每个内容的要求水平是以高等代数为标准。以线性方程组的研究为切入点展开。以内积空间、线性映射、二次型的内容为结束。

同时，在附录里介绍了中学现在被弱化的复数、三角函数等内容，也介绍了要下个学期才学的多项式的初步内容。



浙江大学

ZheJiang University

- 下册的一个首要任务要把上册中因为作为线性代数而没有讲的内容提炼出来，与其他高等代数要求的内容融合在一起。这个最典型的的就是第三章前半部的“直和理论”。下册学了后，我们的高代内容水准不低于国内任何一本高代的教材的要求。
- 特点：
 1. 补充了多元高次方程组的消元法
 2. 用广义逆理论给出线性方程组的(最小二乘解的)公式解
 3. 用内积空间各类推广来帮助学生更好地理解内积空间的本质
 4. 对辛空间介绍的处理



浙江大学

ZheJiang University

二、拔尖人才班要求下的高等代数教学

- 要求我们尽可能给予学生高水平的教学内容，并把优秀学生通过教学过程选拔出来，为他们最后走向“拔尖”做好准备。

（这方面采用了美国伊利诺伊大学数学系的教材。

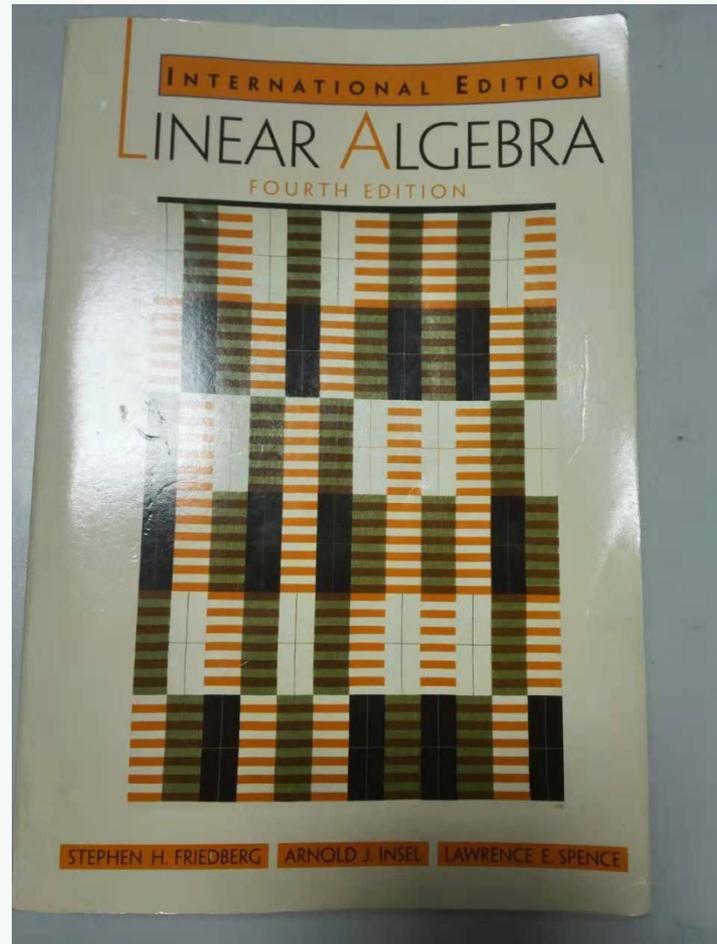
关键：在教好本教材的同时，顾及我们从50年代开始的“高等代数”的教学传统，包括多项式的介绍、习题等、与以矩阵为中心的教材的相互理解。

因为这本教材是站在算子的角度来处理整个线性代数的理论的）



浙江大学

ZheJiang University





浙江大学

ZheJiang University

这学期我在上抽象代数，我在考虑：

- 从学生学习的整体要求来看，高代的学习中，一些内容的讲解，如果考虑到下阶段，特别是抽象代数的学习，为这些后继课程的学习做好铺垫，应该是更好的、有必要的。
- 比如：行列式的引入中所用的“排列和逆序”，可以为之后的置换群的引入做好铺垫



浙江大学

ZheJiang University

- 夫筹学之道，求根创新。学之大者，受诸天地，推理寻真，必若古之辞赋大家，赋比并用，若虚若实，外则参乎物象数理之阴阳表里，内则究物我天赋流通之大气！有规有矩，无界无疆。此理学人文之根基也。学之上流，辞兼理文，雅洁瑰丽，直可以动天地而感鬼神。

-----丘成桐



浙江大学

ZheJiang University



谢谢大家！

